Η Τριγωνική Παραγοντοποίηση στον Αναθεωρημένο Αλγόριθμο Simplex

Νικόλαος Πλόσκας
Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Μακεδονίας
Εγνατίας 156, Θεσσαλονίκη, 54006

Νικόλαος Σαμαράς
Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Μακεδονίας
Εγνατίας 156, Θεσσαλονίκη, 54006

Ιάσων Παπαθανασίου
Τμήμα Μάρκετινγκ και Διοίκησης Λειτουργιών, Πανεπιστήμιο Μακεδονίας
Αγ. Δημητρίου 49, Έδεσσα, 58200

Περίληψη

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός είναι μία από τις πιο σημαντικές περιοχές της Επιχειρησιακής Έρευνας. Η μέθοδος Simplex είναι μία ευρέως διαδεδομένη μέθοδος για την επίλυση γραμμικών προβλημάτων. Το πιο χρονοβόρο βήμα των αλγορίθμων τύπου Simplex είναι η αντιστροφή της βάσης και γι' αυτό το λόγο πρέπει να σχεδιαστεί και να υλοποιηθεί κατάλληλα. Ωστόσο, η αντιστροφή της βάσης δε χρειάζεται να υπολογίζεται εξαρχής σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου, αλλά για το σκοπό αυτό μπορούν να χρησιμοποιηθούν διάφορες μέθοδοι για την επιτάχυνση του συγκεκριμένου υπολογισμού. Στόχος της εργασίας αυτής είναι η μελέτη και υπολογιστική σύγκριση των μεθόδων τριγωνικής παραγοντοποίησης της βάσης στον Αναθεωρημένο Αλγόριθμο Simplex. Πιο συγκεκριμένα, η εργασία παρουσιάζει μια υπολογιστική μελέτη κατά την οποία η βάση στον Αναθεωρημένο Αλγόριθμο Simplex υπολογίζεται με βάση τις μεθόδους: i) της κλασικής τριγωνικής παραγοντοποίησης (LU Decomposition), ii) Bartels-Golub, iii) Forrest-Tomlin και iv) Sherman-Morrison-Woodbury.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ

Αναθεωρημένος Αλγόριθμος Simplex, Αντιστροφή της Βάσης, Τριγωνική Παραγοντοποίηση, Γραμμικός Προγραμματισμός.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός (ΓΠ) είναι η διαδικασία ελαχιστοποίησης ή μεγιστοποίησης μιας γραμμικής αντικειμενικής συνάρτησης που υπόκειται σε ένα αριθμό από ισοτικούς ή ανισοτικούς περιορισμούς. Το ΓΠ στη γενική του μορφή αποτυπώνεται στην εξίσωση (1).

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \mu.\pi. & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad (1)$$

όπου $A \in R^{mxn}$, $(c, x) \in R^n$, $b \in R^m$, και με T συμβολίζεται ο ανάστροφος πίνακα. Το δυϊκό πρόβλημα του προβλήματος που περιγράφεται στην εξίσωση (1) φαίνεται παρακάτω:

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^T w \\ \text{subject to} & A^T w + s = c \\ & s \geq 0 \end{array} \qquad (2)$$

όπου $w \in R^m$ και $s \in R^n$.

Σε κάθε επανάληψη των αλγόριθμων τύπου simplex υπολογίζεται η αντίστροφος της βάσης. Το βήμα της αντιστροφής καταλαμβάνει τον περισσότερο χρόνο από όλα τα υπόλοιπα βήματα του αλγορίθμου. Για το σκοπό αυτό πρέπει να σχεδιαστεί με προσοχή. Ωστόσο, η αντίστροφος της βάσης δε χρειάζεται να υπολογίζεται εξαρχής σε κάθε επανάληψη, αλλά μπορεί να ανανεώνεται βάσει κάποιας μεθόδου. Πολλές μέθοδοι ανανέωσης της βάσης έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία (Bartels and Golub, 1969; Benhamadou, 2002; Dantzig and Orchard-Hays, 1954; Forrest and Tomlin, 1972; Markowitz, 1957; Reid, 1982; Suhl and Suhl, 1993).

Στην εργασία αυτή συγκρίνονται τέσσερις μέθοδοι ανανέωσης της βάσης που στηρίζονται στην τριγωνική παραγοντοποίηση. Οι μέθοδοι αυτοί είναι οι εξής: i) κλασική τριγωνική παραγοντοποίηση (LU Decomposition), ii) Bartels-Golub, iii) Forrest-Tomlin και iv) Sherman-Morrison-Woodbury.

2. ΑΝΑΘΕΩΡΗΜΕΝΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ SIMPLEX

Το ΓΠ της εξίσωσης (1) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ \text{subject to} & A_B x_B + A_N x_N = b \qquad (3) \\ & x_B, x_N \geq 0 \end{array}$$

Στην εξίσωση (3), A_B είναι ένας mxm υποπίνακας του A, ο οποίος ονομάζεται βασική μήτρα ή βάση. Οι στήλες του A που ανήκουν στο σύνολο B ονομάζονται βασικές και αυτές που ανήκουν στο σύνολο N ονομάζονται μη βασικές. Η λύση του ΓΠ $x_B = A_B^{-1}b, x_N = 0$ ονομάζεται βασική λύση. Μία λύση του προβλήματος $x = (x_B, x_N)$ είναι εφικτή αν x > 0, αλλιώς η λύση είναι μη εφικτή. Η επίλυση του ΓΠ της εξίσωσης (2) υπολογίζεται από τη σχέση $s = c - A^T w$, όπου $w = (c_B)^T A_B^{-1}$ είναι οι πολλαπλασιαστές simplex και s είναι οι δυϊκές χαλαρές μεταβλητές. Η βάση A_B είναι δυϊκά εφικτή, αν $s \geq 0$.
Μία περιγραφή των βημάτων του αναθεωρημένου αλγόριθμου simplex (Dantzig, Orden and Wolfe, 1953), παρατίθεται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 1 Αναθεωρημένος Αλγόριθμος Simplex

Βήμα 0. (*Αρχικοποίηση*).
Επιλογή μίας εφικτής διαμέρισης (B, N). Υπολογισμός των A_B^{-1}, x_B, w και s_N.
Βήμα 1. (*Έλεγχος βελτιστότητας*).
Αν $s_N \geq 0$ τότε
Το ΓΠ είναι βέλτιστο.
αλλιώς
Επιλογή του δείκτη l της εισερχόμενης μεταβλητής χρησιμοποιώντας κάποιον κανόνα περιστροφής.
Η μεταβλητή x_l εισέρχεται στη βάση.
Βήμα 2. (*Τεστ ελαχίστου λόγου*).
Υπολογισμός της στήλης περιστροφής $h_l = A_B^{-1} A_{.l}$.
Αν $h_l \leq 0$ τότε
Το ΓΠ είναι απεριόριστο.
αλλιώς
Επιλογή της εξερχόμενης μεταβλητής $x_{B[r]} = x_k$ χρησιμοποιώντας την παρακάτω εξίσωση:

$$x_{B[r]} = \frac{x_{B[r]}}{h_{il}} = \min\left\{\frac{x_{B[i]}}{h_{il}} : h_{il} < 0\right\} \qquad (4)$$

Βήμα 3. (*Περιστροφή*).
Εναλλαγή των δεικτών k και l. Ανανέωση της βάσης και υπολογισμός της νέας αντιστρόφου $\overline{A_B^{-1}}$, χρησιμοποιώντας κάποια μέθοδο ανανέωσης της βάσης.
Επιστροφή στο βήμα 1.

3. ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΤΗΣ ΒΑΣΗΣ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι 4 μέθοδοι για την ανανέωση της βάσης σε κάθε επανάληψη του αλγόριθμου simplex.

3.1 Κλασική Τριγωνική Παραγοντοποίηση

Η κλασική τριγωνική παραγοντοποίηση παραγοντοποιεί ένα πίνακα ως το γινόμενο ενός άνω (U) και ενός κάτω (L) τριγωνικού πίνακα. Η μέθοδος αυτή είναι μία από τις πρώτες τεχνικές που χρησιμοποιήθηκαν για την αντιστροφή της βάσης στον αναθεωρημένο αλγόριθμο simplex. Στην παρούσα εργασία γίνεται μία πλήρης αντιστροφή της βάσης με τη μέθοδο αυτή σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου και για το σκοπό αυτό έχει χρησιμοποιηθεί η ενσωματωμένη στο MATLAB μέθοδος ‘lu’.

3.2 Μέθοδος Bartels-Golub

Η μέθοδος των Bartels-Golub (1969) δεν εκτελεί μία πλήρη αντιστροφή της βάσης σε κάθε επανάληψη, αλλά αρχικά παραγοντοποιεί τη βάση σε ένα άνω και κάτω τριγωνικό πίνακα και στη συνέχεια πραγματοποιεί δύο προς τα πίσω αντικαταστάσεις αντί για την πλήρη αντιστροφή του πίνακα. Μόλις επιλεχθεί η εισερχόμενη μεταβλητή, η μέθοδος Bartels-Golub τροποποιεί μόνο τον άνω τριγωνικό πίνακα. Αυτή η τροποποίηση του άνω τριγωνικού πίνακα μπορεί να οδηγήσει σε μείωση της απόδοσης της μεθόδου (Suhl and Suhl, 1993), ωστόσο η μέθοδος αυτή είναι αριθμητικά ακριβής.

3.3 Μέθοδος Forrest-Tomlin

Μία άλλη παραλλαγή του αναθεωρημένου αλγόριθμου simplex, που έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως, προτάθηκε από τους Forrest και Tomlin (1972). Η μέθοδος αυτή δημιουργήθηκε τροποποιώντας μια γενικού σκοπού μέθοδο τριγωνικής παραγοντοποίησης που προτάθηκε από τους Brayton et al. (1970). Σε αντίθεση με τη μέθοδο Bartels-Golub, η μέθοδος αυτή δεν τροποποιεί τον άνω τριγωνικό πίνακα, αλλά πραγματοποιεί μία προς τα πίσω αντικατάσταση με τον άνω τριγωνικό πίνακα. Ωστόσο, μετά από ένα συγκεκριμένο αριθμό επαναλήψεων πρέπει να εκτελεστεί μία πλήρης τριγωνική παραγοντοποίηση για να αποφευχθούν λάθη στρογγυλοποίησης που μεταδίδονται με τους υπολογισμούς.

3.4 Μέθοδος Sherman-Morrison-Woodbury

Μία άλλη μέθοδος, που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανανέωση της βάσης, είναι ο τύπος των Sherman-Morrison-Woodbury που προτάθηκε από τους Golub και Loan (1996). Ο τύπος των Sherman-Morrison-Woodbury είναι μία γενίκευση του ευρέως διαδεδομένου τύπου Sherman-Morrison που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανανέωση της βάσης και παρατίθεται παρακάτω:

$$A_k^{-1} = A_B^{-1} - A_B^{-1}R(I + S'A_B^{-1}R)^{-1}S'A_B^{-1} \qquad (5)$$

όπου A_k^{-1} είναι η νέα αντίστροφος της βάσης μετά από k διαδοχικές ανανεώσεις στηλών, $R \in \Re^{m \times k}$ είναι η διαφορά μεταξύ των εισερχόμενων και εξερχόμενων στηλών, κάθε στήλη του $S \in \Re^{m \times k}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα που δείχνει το δείκτη της στήλης που ανανεώνεται και I είναι ο μοναδιαίος πίνακας.

4. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ

Η υπολογιστική μελέτη των τεσσάρων μεθόδων ανανέωσης της βάσης πραγματοποιήθηκε σε έναν υπολογιστή με επεξεργαστή Intel Core i7 2.2 GHz και 6 Gbyte κύριας μνήμης. Όλοι οι αλγόριθμοι υλοποιήθηκαν στο προγραμματιστικό περιβάλλον MATLAB και τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν είναι 15 προβλήματα του συνόλου Netlib (Gay, 1985). Στον πίνακα 2 φαίνονται οι πληροφορίες για τα προβλήματα που χρησιμοποιήθηκαν. Πιο συγκεκριμένα, στην $1^η$ στήλη φαίνεται το όνομα του προβλήματος, στην $2^η$ το πλήθος των περιορισμών, στην $3^η$ το πλήθος των μεταβλητών, στην $4^η$ το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων και στην $5^η$ η αραιότητα του προβλήματος.

Πίνακας 2 Στατιστικά των προβλημάτων

Πρόβλημα	Περιορισμοί	Μεταβλητές	Μη μηδενικά στοιχεία	Αραιότητα
blend	74	83	491	7.99%
brandy	220	249	2148	3.92%
e226	223	282	2578	4.10%
fffff800	524	854	6227	1.39%
israel	174	142	2269	9.18%
klein3	994	88	12107	13.84%
lotfi	153	308	1078	2.29%
sc105	105	103	280	2.59%

sc205	205	203	551	1.32%
scrs8	490	1169	3182	0.56%
sctap1	300	480	1692	1.18%
sctap2	1090	1880	6714	0.33%
share1b	117	225	1151	4.37%
share2b	96	79	694	9.15%
wood1p	244	2594	70215	11.09%

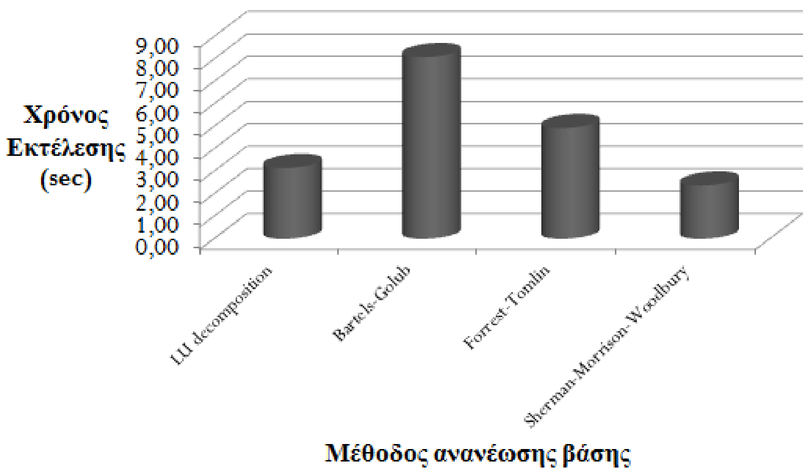
Στον πίνακα 3 αποτυπώνονται τα αποτελέσματα των εκτελέσεων για τις τέσσερις μεθόδους. Όλοι οι χρόνοι είναι σε δευτερόλεπτα. Όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, τόσο ξεχωριστά από κάθε πρόβλημα όσο και από το μέσο όρο του χρόνου, η μέθοδος Sherman-Morrison-Woodbury είναι ταχύτερη από όλες τις υπόλοιπες μεθόδους και ακολουθεί η κλασική τριγωνική παραγοντοποίηση, που αν και διεξάγει πλήρη αντιστροφή της βάσης σε κάθε επανάληψη είναι ταχύτερη από τις μεθόδους Bartels-Golub και Forrest-Tomlin, λόγω του ότι είναι μία συνάρτηση ενσωματωμένη στο Matlab και έχει βελτιστοποιηθεί. Έπεται η μέθοδος Forrest-Tomlin, ενώ πιο αργή από όλες τις μεθόδους είναι η μέθοδος των Bartels-Golub.

Πίνακας 3 Χρόνος εκτέλεσης των 4 μεθόδων

Πρόβλημα	Κλασική Τριγωνική Παραγοντοποίηση	Bartels-Golub	Forrest-Tomlin	Sherman-Morririson-Woodbury
blend	0.17	0.24	0.21	0.07
brandy	0.42	0.44	0.42	0.36
e226	2.14	5.93	3.17	0.45
fffff800	7.13	11.21	8.42	6.16
israel	0.76	1.67	1.08	0.16
klein3	7.25	8.01	7.31	7.19
lotfi	0.53	0.75	0.71	0.32
sc105	0.12	0.22	0.15	0.10
sc205	0.51	0.66	0.49	0.14
scrs8	10.98	44.76	14.22	5.89
sctap1	0.57	1.18	1.18	0.29
sctap2	7.65	15.34	27.44	5.55
share1b	0.22	0.39	0.25	0.15
share2b	0.07	0.11	0.11	0.07
wood1p	8.74	30.43	8.73	8.56
Μέσος όρος	3.15	8.09	4.93	2.36

Στο σχήμα 1 φαίνεται και διαγραμματικά ο μέσος χρόνος εκτέλεσης των τεσσάρων μεθόδων ανανέωσης της βάσης.

Σχήμα 4 Χρόνος εκτέλεσης των 4 μεθόδων



5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην εργασία αυτή διεξήχθη μια υπολογιστική σύγκριση τεσσάρων μεθόδων ανανέωσης της βάσης στον αναθεωρημένο αλγόριθμο simplex. Τα αποτελέσματα της υπολογιστικής μελέτης έδειξαν ότι η ανανέωση της βάσης με τον τύπο των Sherman-Morrison-Woodbury είναι πολύ ταχύτερη από όλες τις υπόλοιπες μεθόδους. Ακολουθεί η πλήρης τριγωνική παραγοντοποίηση, στη συνέχεια η μέθοδος Forrest-Tomlin, ενώ πιο αργή από όλες τις μεθόδους είναι η μέθοδος Bartels-Golub.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Bartels R.H., Golub G.H., 1969. *The simplex method of linear programming using LU decomposition*, Communications of the ACM, Vol. 12, pp. 266–268.

Benhamadou M., 2002. *On the simplex algorithm 'revised form'*, Advances in Engineering Software, Vol. 33, pp. 769-777.

Brayton R.K., Gustavson, F.G., Willoughby R.A., 1970. *Some results on sparse matrices*, Mathematics of Computation, Vol. 24, pp. 937–954.

Dantzig G.B., Orchard-Hays W, 1954. *The product form of the inverse in the simplex method*, Math. Comp., Vol. 8, pp. 64-67.

Dantzig G.B., Orden A., Wolfe P., 1953. *The Generalized Simplex Method*, RAND P-392-1, August 4.

Forrest J.J.H., Tomlin J.A., 1972. *Updated triangular factors of the basis to maintain sparsity in the product form simplex method*, Mathematical Programming, Vol. 2, pp. 263–278.

Gay D.M., 1985. *Electronic mail distribution of linear programming test problems*, Mathematical Programming Society COAL Newsletter, Vol. 13, pp. 10-12.

Golub G.H., van Loan C.F., 1996. *Matrix Computations*, third ed., The Johns Hopkins University Press, Baltimore, London.

Markowitz H., 1957. *The elimination form of the inverse and its applications to linear programming*, Management Science, Vol. 3, pp. 255–269.

Reid J., 1982. *A sparsity-exploiting variant of the Bartels-Golub decomposition for linear programming bases*, Mathematical Programming, Vol. 24, pp. 55–69.

Suhl L.M., Suhl U.H., 1993. *A fast LU update for linear programming*, Annals of Operations Research, Vol. 43, No. 1, pp.33–47.